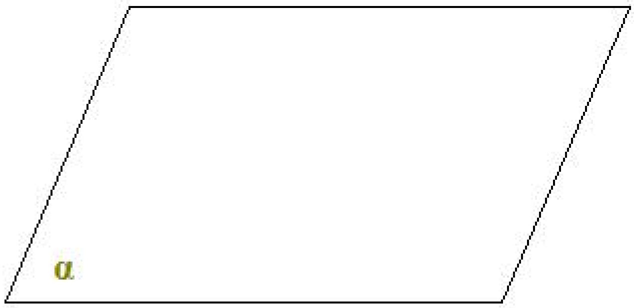
I POLIGONI

In questa lezione ci occuperemo delle **FIGURE GEOMETRICHE PIANE**.

Con questa espressione si intende **UN QUALSIASI INSIEME DI PUNTI APPARTENENTI AD UNO STESSO PIANO**.

Disegniamo il **PIANO** **α:**

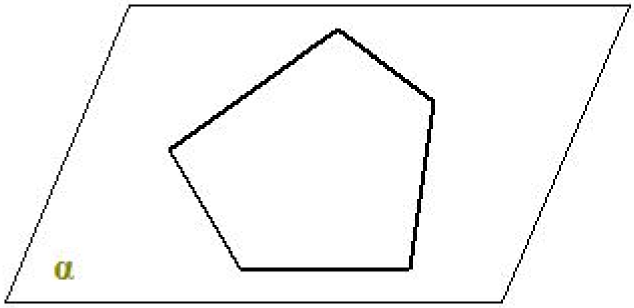


Ricordiamo

α *è una lettera dell'alfabeto greco e si legge Alfa.*

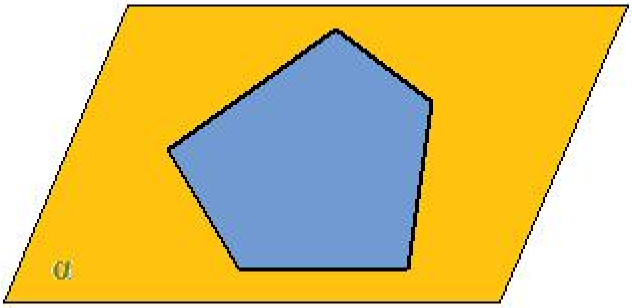
Il **PIANO** deve essere immaginato come **ESTESO IN TUTTI I SENSI ALL'INFINITO** anche se, per poterlo rappresentare, ci limitiamo a disegnare solamente una parte di esso.

Ora disegniamo, sul **piano α**, una **LINEA SPEZZATA SEMPLICE CHIUSA**:



Essa divide il piano in due parti:

- una **PARTE ESTERNA** che, nel disegno successivo, abbiamo indicato con il colore **ARANCIO**;
- una **PARTE INTERNA** che, nel disegno successivo, abbiamo indicato con il colore **AZZURRO**.



La **PARTE ESTERNA** è **INFINITA** o **ILLIMITATA**, essendo il piano infinito.

La **PARTE INTERNA** è **FINITA** o **LIMITATA**.

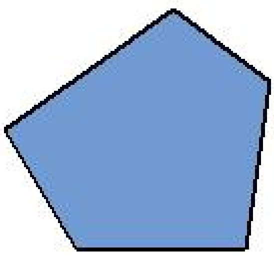
La **PARTE INTERNA** prende il nome di **POLIGONO**.

Quindi, possiamo dire che un **POLIGONO** è la **PARTE DI PIANO LIMITATA da UNA SPEZZATA SEMPLICE CHIUSA**.

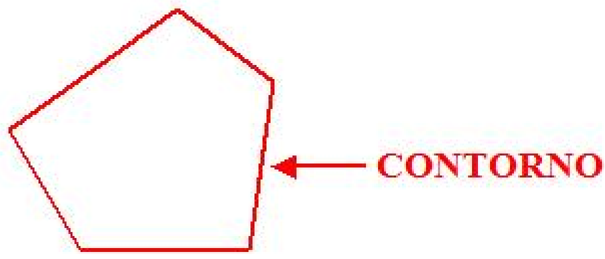
D'ora in poi, nel disegnare i poligoni, non disegniamo il piano.

Le caratteristiche di un poligono.

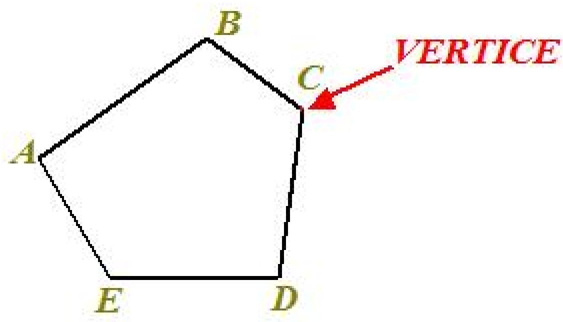
Torniamo a disegnare il nostro **POLIGONO**:



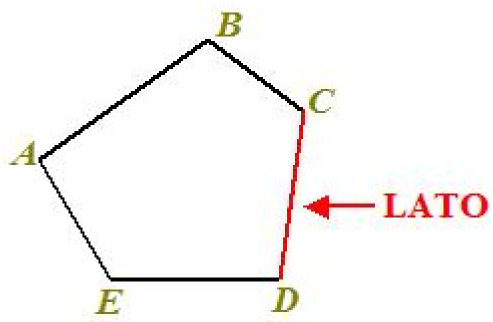
La <u>**LINEA SPEZZATA SEMPLICE CHIUSA**</u> che delimita il **POLIGONO** prende il nome di **CONTORNO del poligono**:



I <u>punti</u> ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***E*** sono i **VERTICI del poligono**:

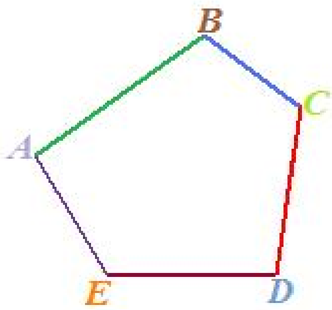


I segmenti ***AB***, ***BC***, ***CD***, ***DE***, ***EA*** sono i **LATI del poligono**:



Osserviamo il nostro poligono. Esso ha:

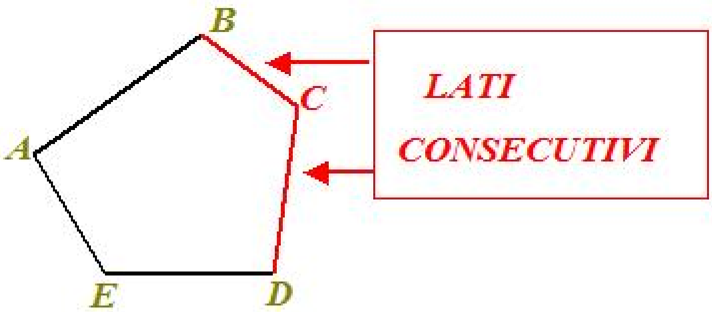
- 5 vertici e 5 lati.



In ogni **POLIGONO** il numero dei **VERTICI** è **UGUALE** al numero dei **LATI**.

DUE LATI del poligono che hanno **un VERTICE IN COMUNE** si dicono **CONSECUTIVI**.

Ad esempio, sono consecutivi i lati ***BC*** e ***CD*** in quanto hanno in comune il vertice ***C***:

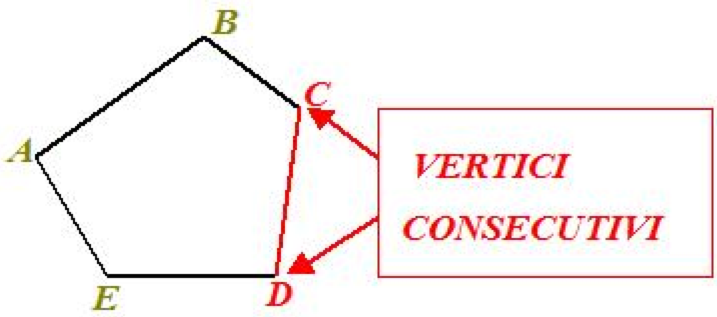


Ma sono consecutivi anche i lati:

- ***AB*** e ***BC*** che hanno in comune il vertice ***B***;
- ***CD*** e ***DE*** che hanno in comune il vertice ***D***;
- ***DE*** e ***EA*** che hanno in comune il vertice ***E***;
- ***EA*** e ***AB*** che hanno in comune il vertice ***A***.

DUE VERTICI del poligono che **APPARTENGONO AD UNO STESSO LATO** si dicono **CONSECUTIVI**.

Ad esempio, sono consecutivi i vertici ***C*** e ***D*** in quanto appartengono allo stesso lato ***CD***:



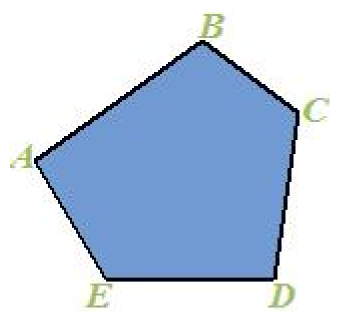
Ma sono consecutivi anche i vertici:

- ***D*** ed ***E***;
- ***E*** ed ***A***;
- ***A*** e ***B***;
- ***B*** e ***C***.

Un poligono viene **indicato** pronunciando le **LETTERE** dei suoi **VERTICI secondo l'ORDINE CON CUI SI SUSSEGUONO SUL CONTORNO**. Nel nostro caso, il poligono disegnato prende il nome di: ***ABCDE***

PERIMETRO di un POLIGONO

Disegniamo il nostro **POLIGONO *ABCDE***:



La **<u>MISURA DEL CONTORNO</u>** del poligono prende il nome di **PERIMETRO del poligono**.

In altre parole il **PERIMETRO** di un poligono è la **SOMMA** delle **MISURE DELLE LUNGHEZZE di tutti i suoi LATI**.

Esempio:

Un poligono ha i lati che misurano rispettivamente cm 4, cm 5, cm 3, cm 6, cm 3,5.
Determinare il perimetro del poligono.

Per trovare il perimetro del poligono è sufficiente sommare le misure dei suoi lati. Quindi:

PERIMETRO = 4 + 5 + 3 + 6 + 3,5 = cm 21,5.

***P**= cm 21,5.*

A volte il perimetro viene indicato anche con

2p

(Attenzione! Qui la p è minuscola).

In questo caso **p** indica il **SEMIPERIMETRO**, ovvero **META' PERIMETRO**.

Ricapitolando:

P = perimetro

2p = perimetro

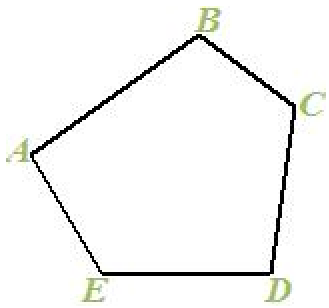
p = semiperimetro.

Noi useremo la simbologia 2p, in modo che indicheremo con p il semiperimetro. Il poligono può avere un numero di lati variabile. Il nome del poligono varia a seconda del numero di lati che lo compone:

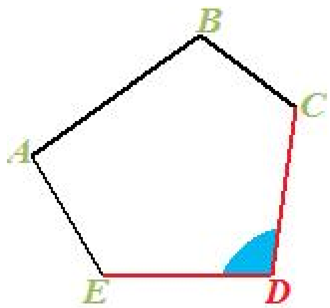
NUMERO DI LATI	NOME DEL POLIGONO
3 lati	TRIANGOLO
4 lati	QUADRILATERO o QUADRANGOLO
5 lati	PENTAGONO
6 lati	ESAGONO
7 lati	ETTAGONO
8 lati	OTTAGONO
9 lati	ENNAGONO
10 lati	DECAGONO
12 lati	DODECAGONO
15 lati	PENTADECAGONO
20 lati	ICOSAGONO

ANGOLI INTERNI e ANGOLI ESTERNI di un POLIGONO

Disegniamo il nostro **POLIGONO *ABCDE***:

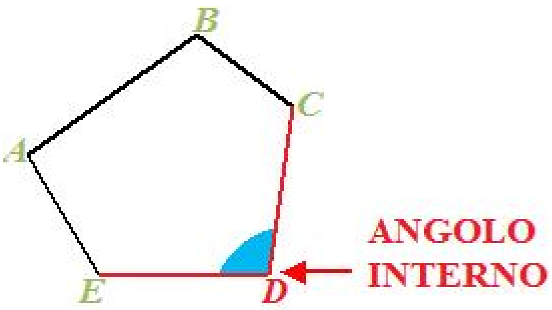


Ora soffermiamoci ad osservare l'angolo $E\hat{D}C$:



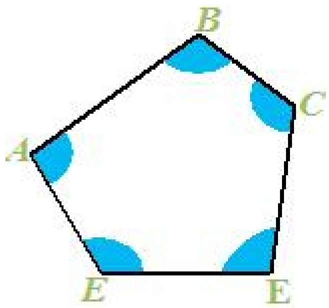
Il nostro angolo è formato da **DUE LATI CONSECUTIVI**, cioè **DUE LATI** aventi un **VERTICE COMUNE**. Infatti, i lati ***ED*** e ***DC*** hanno il vertice ***D*** in comune.

Un angolo di questo tipo si chiama **ANGOLO INTERNO** del **POLIGONO**.

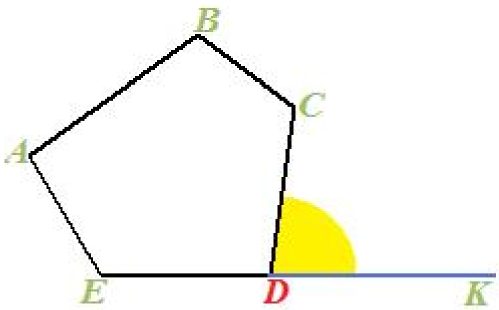


Generalizzando, quindi, possiamo dire che gli **ANGOLI INTERNI** del poligono sono quegli angoli **FORMATI DA DUE LATI COSECUTIVI**.

Nell'immagine sottostante, abbiamo evidenziato in **AZZURRO** gli **ANGOLI INTERNI** del poligono:



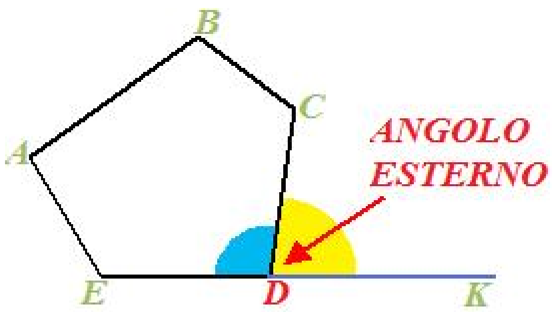
Ora osserviamo l'angolo $C\hat{D}K$:



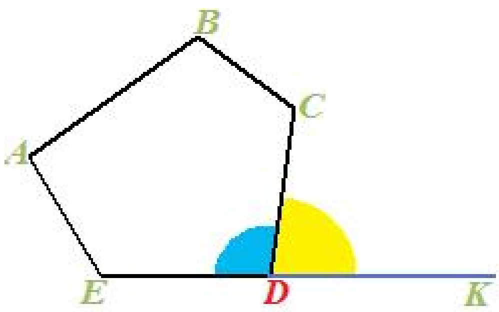
Questo angolo è formato da:

- un lato del poligono (il lato *CD*);
- il prolungamento di uno dei lati consecutivi (il prolungamento del lato *ED*). L'angolo $C\hat{D}K$ è un **ANGOLO ESTERNO**.

Quindi, si dicono **ANGOLI ESTERNI** del poligono, gli angoli formati da **UN LATO** del poligono e dal **PROLUNGAMENTO di uno dei LATI CONSECUTIVI**.



Ora osserviamo questa immagine:



Nel disegno precedente abbiamo evidenziato l'angolo $E\hat{D}C$ e l'angolo $C\hat{D}K$.

Questi due angoli hanno il **VERTICE COMUNE** (***D***).

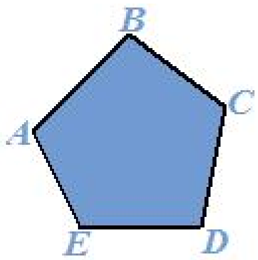
Notiamo che i due **ANGOLI** sono **<u>ADIACENTI</u>**. Ricordiamo che due angoli si dicono **ADIACENTI** se sono **CONSECUTIVI** e hanno i due lati non comuni (***ED*** e ***DK***) che **APPARTENGONO AD UNA STESSA RETTA**.

Sappiamo, inoltre, che due **ANGOLI ADIACENTE** sono **<u>SUPPLEMENTARI</u>**, cioè la loro somma misura **180°**, come si vede chiaramente dal disegno precedente.

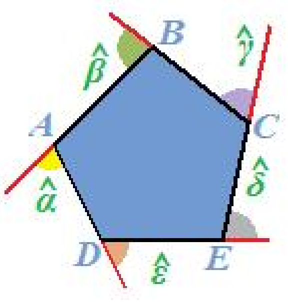
Quindi possiamo dire che, **OGNI ANGOLO ESTERNO** è **ADIACENTE**, e quindi **SUPPLEMENTARE**, dell'**ANGOLO INTERNO avente lo STESSO VERTICE**.

SOMMA degli ANGOLI ESTERNI di un POLIGONO

Disegniamo il poligono *ABCDE*:



Ora disegniamo gli **ANGOLI ESTERNI** del poligono. Ricordiamo che sono **angoli esterni** del poligono, gli angoli formati da **UN LATO** del poligono e dal **PROLUNGAMENTO di uno dei LATI CONSECUTIVI**:



Abbiamo indicato gli angoli esterni del poligono con le lettere dell'alfabeto greco:

α β γ δ ε che si leggono

α *Alfa*

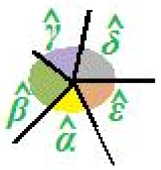
β *Beta*

γ *Gramma*

δ *Delta*

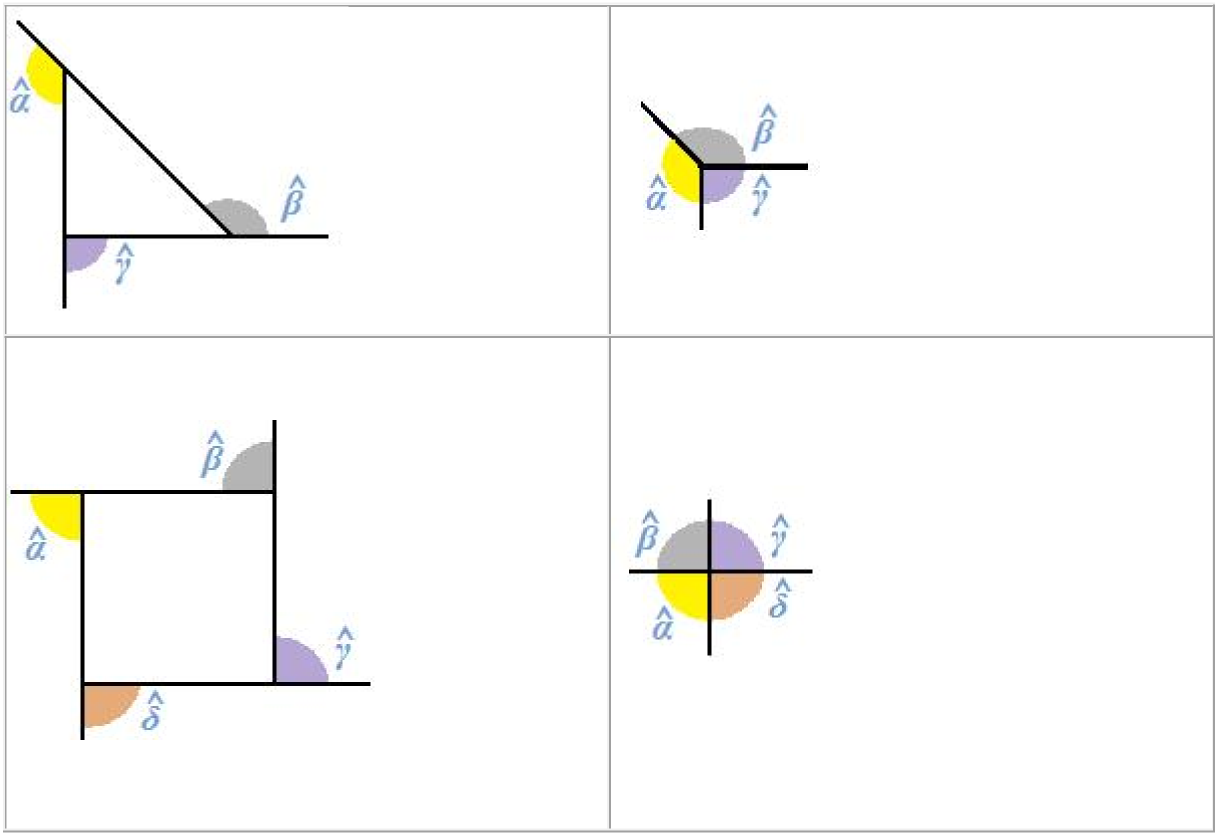
ε *Epsilon.*

Ora prendiamo tutti gli **ANGOLI ESTERNI** del poligono e li riuniamo intorno ad un unico vertice in maniera che essi siano consecutivi a due a due:



E' evidente che la **SOMMA** degli **ANGOLI ESTERNI** del **POLIGONO** è un **ANGOLO GIRO**, cioè misura **360**°.

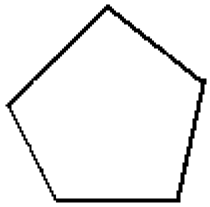
Possiamo ripetere l'esperimento con qualsiasi tipo di poligono ottenendo sempre il medesimo risultato:



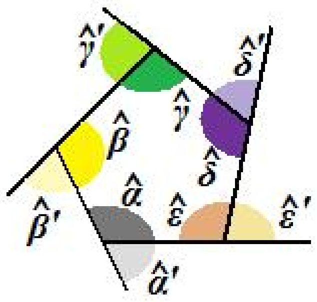
Quindi possiamo affermare che in un **POLIGONO** *qualsiasi*, la **SOMMA degli ANGOLI ESTERNI** è pari a **360°**.

SOMMA degli ANGOLI INTERNI di un POLIGONO

Disegniamo un poligono:



Ora disegniamo gli **ANGOLI INTERNI** e gli **ANGOLI ESTERNI** del poligono:



Generalizzando, se indichiamo con **n** il numero di **lati di un poligono** (e dunque anche il **numero di angoli**) la **SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI** è pari a:

$$S_I = (n-2) \times 180°.$$

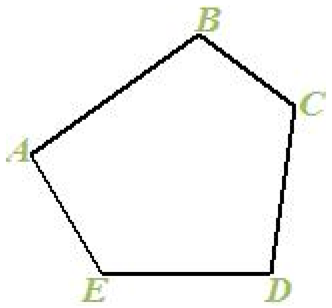
Vediamo cosa accade con vari tipi di poligoni:

	n lati del poligono	S_I
TRIANGOLO: **3 lati e 3 angoli**	3	(3 -2) x 180°= 180°
QUADRILATERO: **4 lati e 4 angoli**	4	(4 -2) x 180°=360°
PENTAGONO:	5	(5 - 2) x 180°=540°

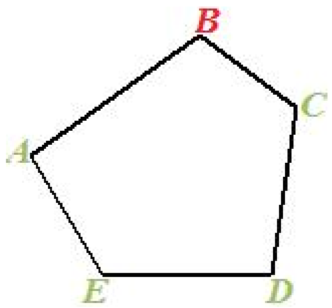
5 lati e 5 angoli		
ESAGONO: 6 lati e 6 angoli	6	(6 -2) x 180°=720°

DIAGONALE di un POLIGONO

Consideriamo il **POLIGONO *ABCDE***:

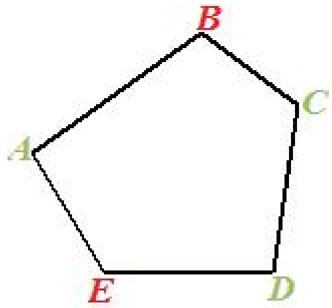


Ora prendiamo il **VERTICE *B***:

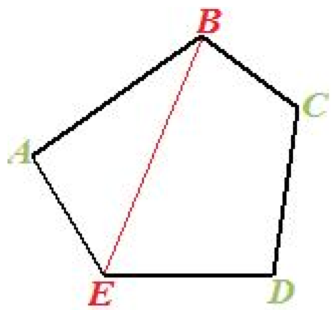


Scegliamo un altro **VERTICE** del poligono, uno qualsiasi, purché **NON CONSECUTIVO**. Ricordiamo che due vertici si dicono <u>consecutivi</u> quando **APPARTENGONO AD UNO STESSO LATO**.

Quindi, nel nostro esempio, possiamo scegliere qualsiasi altro vertice ad eccezione di ***A*** e ***C***. Scegliamo, ad esempio, il vertice ***E***:

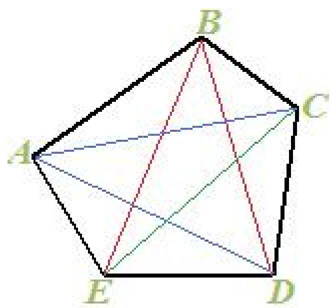


Quindi disegniamo il **SEGMENTO** che unisce i **PUNTI** ***B*** ed ***E***:



Quella che abbiamo disegnato si chiama **DIAGONALE** del poligono.

Ovviamente possiamo fare la stessa cosa con ciascun vertice e i suoi vertici non consecutivi. Allora avremo:



Abbiamo così disegnato tutte le diagonali del nostro poligono. Esse sono:

BE, ***BD***, ***AC***, ***AD***, ***EC***.

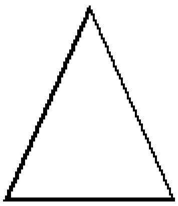
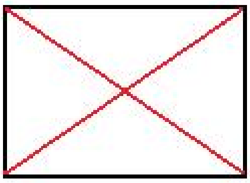
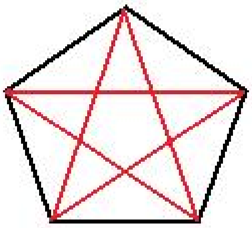
Generalizzando possiamo affermare che si dice **DIAGONALE** di un poligono, ogni **SEGMENTO** che **UNISCE DUE dei suoi VERTICI NON CONSECUTIVI**.

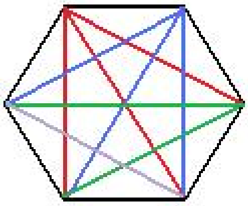
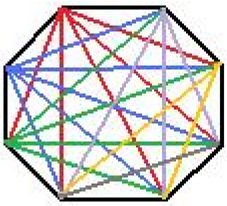
Ma quante sono le diagonali di un poligono?

Dipende dal numero di lati, e dunque di vertici, che il poligono ha.

Nel nostro esempio abbiamo un poligono di 5 lati, ovvero un pentagono: esso ha 5 diagonali.

Vediamo di seguito alcuni esempi:

TRIANGOLO: 	**NESSUNA DIAGONALE**
QUADRILATERO: 	**DUE DIAGONALI**
PENTAGONO: 	**CINQUE DIAGONALI**
ESAGONO:	**NOVE DIAGONALI**

	
OTTAGONO: 	**VENTI DIAGONALI**

NUMERO delle DIAGONALI di un POLIGONO

Quante diagonali ha un poligono?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo sapere che esiste una formula per conoscere in modo rapido quante diagonali ha un poligono.

Chiamiamo con ***n*** il numero di lati del poligono. Ovvero:

n = numero di lati del poligono.

Avremo:

numero diagonali = [n· (n-3)]: 2.

Ad esempio, vogliamo sapere qual è il numero delle diagonali di un esagono.

Dato che l'esagono ha 6 lati avremo:

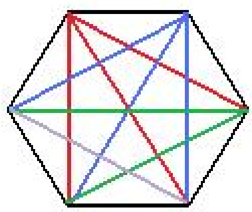
n = 6

numero diagonali = [6 · (6-3)]/ 2 =

= (6 · 3)/2 = 18/2 = 9.

L'esagono ha nove diagonali.

Verifichiamolo provando a disegnare le diagonali dell'esagono:



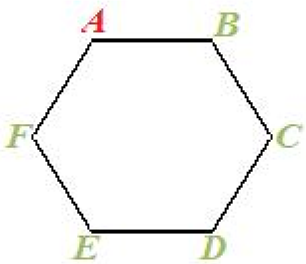
Il numero delle diagonali uscenti da un vertice si usa questa formula:

d=n-3

n = numero di lati del poligono.

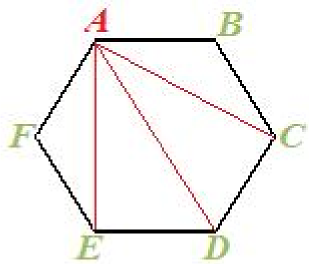
L'esagono ha 6 lati e, quindi, 6 vertici.

Prendiamo uno di questi vertici: il vertice ***A***.



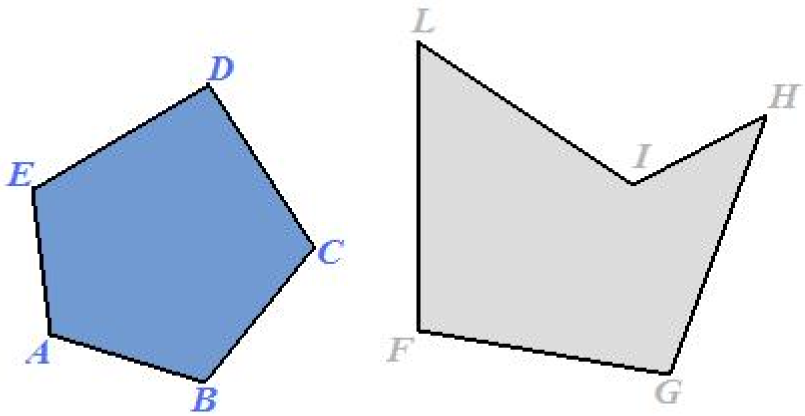
Per calcolare il numero delle diagonali uscenti dal vertice A applico la formula *d=n-3*

d= 6-3=3 quindi tre diagonali che disegniamo



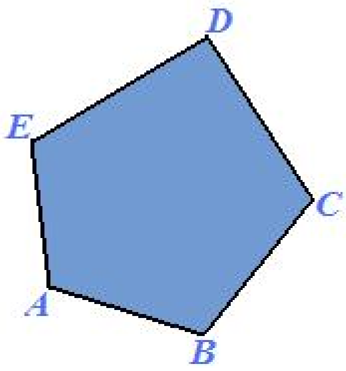
POLIGONI CONCAVI e POLIGONO CONVESSI

Disegniamo due **POLIGONI**: il poligono ***ABCDE*** e il poligono ***FGHIL***.

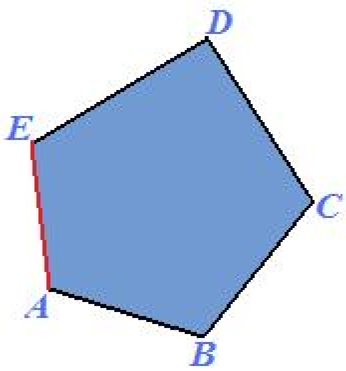


Entrambi i poligono disegnati hanno **5 lati**, quindi entrambi sono dei **PENTAGONI**. Eppure è molto evidente che i due poligoni sono profondamente diversi l'uno dall'altro.

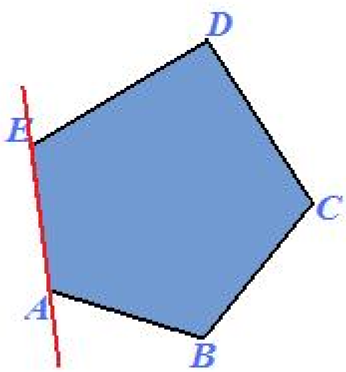
Esaminiamo il primo poligono ***ABCDE***:



Ora scegliamo un lato qualsiasi del poligono, ad esempio, il lato ***AE***:

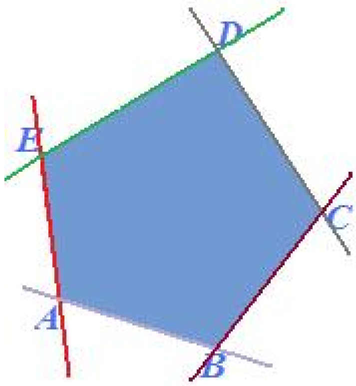


Disegniamo il prolungamento del lato ***AE***. Avremo:



Il **prolungamento del lato *AE*** è **ESTERNO** al poligono.

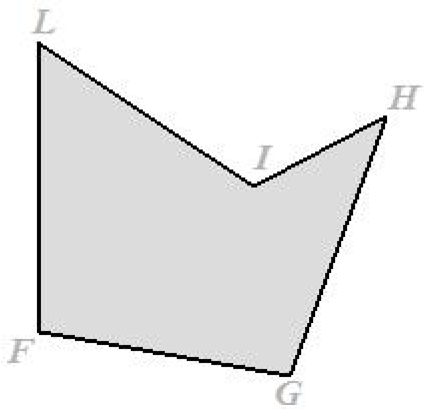
Disegniamo ora i prolungamenti anche dei restanti lati:



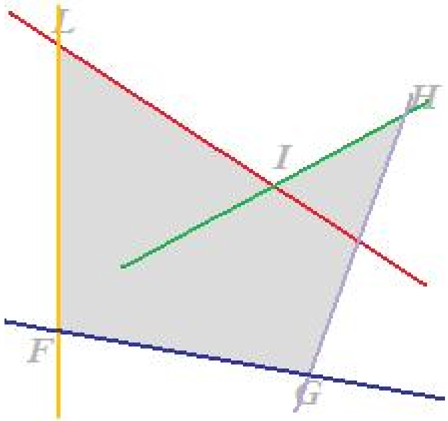
Come possiamo notare, disegnando i **PROLUNGAMENTI di tutti i LATI** del poligono, essi sono **TUTTI ESTERNI** al poligono stesso.

In questo caso il **POLIGONO** si dice **CONVESSO**.

Ora esaminiamo il secondo poligono disegnato ***FGHIL***:



Andiamo, anche in questo caso, a disegnare i prolungamenti dei lati del poligono. Avremo:



Come possiamo notare, disegnando i **PROLUNGAMENTI di tutti i LATI** del poligono, alcuni sono **ESTERNI** al poligono stesso, mentre altri sono **INTERNI**.

In questo caso il **POLIGONO** si dice **CONCAVO**.

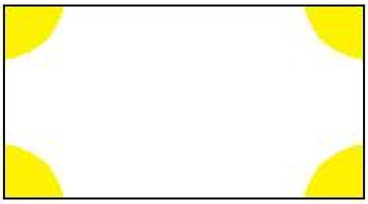
Ricapitolando:

- se il **PROLUNGAMENTO** di **TUTTI** i **LATI** sono **ESTERNI** al poligono, esso si dice **CONVESSO**;
- se il **PROLUNGAMENTO** di **QUALCHE LATO** è **INTERNO** al poligono, esso si dice **CONCAVO**.

Quando non è *diversamente indicato* si fa riferimento a **poligoni convessi**.

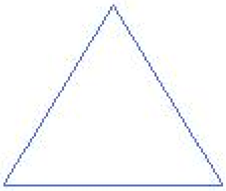
POLIGONI EQUIANGOLI - POLIGONI EQUILATERI - POLIGONI REGOLARI

In questa lezione esamineremo alcuni **POLIGONI** particolari.



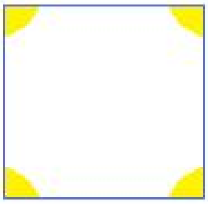
E' evidente che il poligono che abbiamo disegnato qui affianco ha tutti e quattro gli angoli uguali, infatti si tratta di 4 angoli retti.

Un **POLIGONO** i cui **ANGOLI** hanno tutti la **STESSA AMPIEZZA** si dice **EQUIANGOLO**.



Il poligono che abbiamo disegnato qui affianco ha tutti e tre i lati uguali.

Un **POLIGONO** i cui **LATI** hanno tutti la **STESSA LUNGHEZZA** si dice **EQUILATERO**.



Il poligono che abbiamo disegnato qui affianco ha tutti gli angoli uguali e tutti i lati uguali.

Esso, quindi, è un **POLIGONO** al tempo stesso **EQUIANGOLO** e **EQUILATERO**.

Un **POLIGONO** **EQUIANGOLO** e **EQUILATERO** si dice **REGOLARE**.

Ogni poligono che non è equiangolo ed equilatero si dice **IRREGOLARE**.